TD n°15 : Equivalence, Négligeabilité

Exercice 1. Equivalents simples

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \qquad w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2} \qquad z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Exercice 2. Vrai ou faux

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

1. $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$
2. $n^2 \underset{+\infty}{\sim} n^2 + n$
3. $\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(10^6 n)$
4. $\exp(n) \underset{+\infty}{\sim} \exp\left(n + 10^{-6}\right)$
5. $\exp(n) \underset{+\infty}{\sim} \exp(2n)$
6. $\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Exercice 3. Par ordre croissant de négligeabilité

Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n^2} \quad c_n = \frac{\ln n}{n} \quad d_n = \frac{e^n}{n^3} \quad e_n = n \quad f_n = 1 \quad g_n = \sqrt{ne^n}.$$

Exercice 4. Une suite implicite

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution positive que l'on notera u_n.
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\quad u_n \leqslant \ln n$
4. Montrer que pour n assez grand : $\quad u_n \geqslant \ln n - 1$
5. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5. Etude des variations et équivalence

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n, par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n\,x.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en $(0, f_1(0))$.
   (d) Tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 6. Négligeabilité

Soient les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = e^{-x}, \quad f_4(x) = 5^x, \quad f_5(x) = \ln x, \quad f_6(x) = x^{10}, \quad f_7(x) = (\ln x)^{20}, \quad f_8(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Classer ces fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de $+\infty$.
2. Classer ces mêmes fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de 0^+.
3. Pour chacune des fonctions g suivantes, déterminer une fonction qui lui est équivalente en $+\infty$ à l'aide des fonctions f_i :

$$g_1(x) = x^2 - (\ln x)^{20} \qquad g_2(x) = \sqrt{x} + 2 + e^{-x} + \ln x + x^2 \qquad g_3(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + \ln x}$$

$$g_4(x) = \ln x + 2\sin x \qquad g_5(x) = \frac{x^2 + 3}{e^{-x}(\ln x)^{20} + 1}$$

Exercice 7. Détermination d'équivalents simples

Trouver un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^5 + 2x^3 - 4x^2$ au voisinage de $-\infty$, $+\infty$, 0 et 1.
2. $f(x) = \ln(e^x - 1)$ au voisinage de $+\infty$, $\ln(2)$ et 0^+.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + x + \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$, 1 et 0^+.

Exercice 8. Encadrement

Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$, on ait :

$$x^2 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x^2 + x.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 9. Calculs de limites à l'aide des équivalents

Déterminer la limite des fonctions suivantes au point demandé :

1. $x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
2. $\dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{e^{2x} - 1}$ en 0.
3. $\dfrac{\ln\left(2 - x^2\right)}{x - 1}$ en 1.
4. $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ en 1.

Exercice 10. Étude locale au voisinage de 0

1. Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^x - 1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1 + e^{1/x}\right)}{e^{1/x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Ces fonctions sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 11. Calcul d'une limite

1. Soit $t > 0$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{t^{1/x} + 1}{2}\right)^x$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{\alpha^{1/x} + \beta^{1/x}}{2}\right)^x$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 12. Asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que $f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$ en admettant que $\ln(1+u) - u \underset{0}{\sim} \dfrac{-u^2}{2}$.
2. En déduire l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$.